Hölder estimates on the gradient of viscosity solutions of degenerate Bellman type equations involving p-Laplacian type operators

早稲田大学大学院　先進理工研究科　物理学及応用物理学専攻
王暁文 (Xiaowen WANG) *

概要

非発散型偏微分方程式を扱うために１９８０年初頭に粘性解が導入されたことが知られている．非発散型偏微分方程式の典型例としては確率最適制御問題に現れる Bellman 型方程式である．本研究では，p-ラプラシアン型作用素と呼ばれる非発散型作用素を含むような Bellman 型退化楕円型方程式の粘性解の勾配の内部 Hölder 評価を示す．証明の手法については，Improvement of Flatness と呼ばれる方法を使う．

1　導入

本研究では，次の Bellman 型退化楕円型方程式に対する粘性解の勾配の内部評価を考える：

$$\sup_{\alpha\in\mathcal{A}}\left\{-|Du|^{\theta_\alpha}\Delta^N_{p_\alpha}u-f_\alpha(x)\right\}=0 \qquad \text{in } B_1. \tag{1.1}$$

ここで，$B_1 := \{y\in\mathbb{R}^n; |y|<1\}$ を n 次元単位開球，$u : B_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ を未知関数，$\mathcal{A}$ を添え字集合，$f_\alpha : B_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ を外力項とする．また，$\Delta^N_{p_\alpha}$ は normalized p_α-ラプラシアンである（定義は後述）．

本研究の目的は，(1.1) の粘性解の内部 $C^{1,\sigma}$ 評価，即ち勾配の内部 σ-Hölder 連続評価を導くことである．

1.1　粘性解

非発散型偏微分方程式を扱うために１９８０年初頭に Crandall-Lions が粘性解を導入した．各変数について連続である作用素 $F : B_1\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ を考える．ここで，$\mathbb{S}^n$ は n 次実対称行列全体のなす集合である．方程式

$$F(x,u,Du,D^2u)=0 \qquad \text{in } B_1 \tag{1.2}$$

の粘性解の定義は次で与えられる：

* E-mail:wangxiaowen@akane.waseda.jp

定義 1.1 (粘性解)**.** 上（resp. 下）半連続関数 $u \in USC(B_1)$（resp. $LSC(B_1)$）が (1.2) の粘性劣解（resp. 優解）とは，次の性質が成り立つこととする：

「もし，$\varphi \in C^2(B_1)$ に対し，$u - \varphi$ が局所最大値（resp. 最小値）を $x_0 \in B_1$ で取るならば，

$$F(x_0, u(x_0), Du(x_0), D^2u(x_0)) \leq \text{(resp. } \geq)0$$

が成り立つ.」

$u \in C(B_1)$ が (1.2) の粘性解とは，u が (1.2) の粘性劣解且つ粘性優解であることとする.

本研究では，退化楕円型方程式を研究するため，退化楕円型作用素の定義を与える：

定義 1.2 (退化楕円型作用素)**.** $F : B_1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ が退化楕円型作用素とは，任意の $(x, r, q) \in B_1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ と任意の $X \leq Y$ となる $X, Y \in \mathbb{S}^n$ に対し，

$$F(x, r, q, X) \geq F(x, r, q, Y)$$

が成り立つこととする.

退化楕円型方程式は比較的に扱いにくいが，よりよい性質を持つ方程式は一様楕円型方程式である．一様楕円型作用素の定義は次で与えられる：

定義 1.3 (一様楕円型作用素)**.** $F : B_1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ が楕円定数 $0 < \lambda \leq \Lambda$ の一様楕円型作用素とは，任意の $(x, r, q) \in B_1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ と任意の $X \leq Y$ となる $X, Y \in \mathbb{S}^n$ に対し，

$$\lambda \operatorname{tr}(Y - X) \leq F(x, r, q, X) - F(x, r, q, Y) \leq \Lambda \operatorname{tr}(Y - X)$$

が成り立つこととする.

粘性解理論において，次で与えられる Pucci 作用素は非常に重要な役割を果たしている：

定義 1.4 (Pucci 作用素)**.** $0 < \lambda \leq \Lambda$ とする．次で与えられる作用素 $\mathcal{P}^{\pm} : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ は Pucci 作用素と呼ばれる：

$$\mathcal{P}^-(X) := \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X) := -\lambda \sum_{\mu(X) \leq 0} \mu(X) - \Lambda \sum_{\mu(X) \geq 0} \mu(X),$$
$$\mathcal{P}^+(X) := \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X) := -\Lambda \sum_{\mu(X) \leq 0} \mu(X) - \lambda \sum_{\mu(X) \geq 0} \mu(X).$$

ここで，$\mu(X)$ を $X \in \mathbb{S}^n$ の固有値とする.

注記 1.5. Pucci 作用素を用いると一様楕円型作用素は次の不等式で特徴付けられることができる：

$$\mathcal{P}^-(Y - X) \leq F(x, r, q, Y) - F(x, r, q, X) \leq \mathcal{P}^+(Y - X) \qquad (X \leq Y \text{ in } \mathbb{S}^n).$$

1.2 p-ラプラシアン型作用素

p-ラプラシアンが p 乗エネルギーの最小化問題

$$\min_{u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(B_1)} \frac{1}{p} \int_{B_1} |Du|^p dx$$

の Euler–Lagrange 方程式に由来するということがよく知られている．次で与えられる発散型作用素 Δ_p は p-ラプラシアンと呼ばれる：

$$\Delta_p u := \operatorname{div}\left(|Du|^{p-2} Du\right).$$

本研究では，$1 < p < \infty$ の場合のみ考える．形式的に展開すると，次の形が得られる：

$$\Delta_p u = |Du|^{p-2}\left(\Delta u + (p-2)\operatorname{tr}\left(\frac{Du}{|Du|} \otimes \frac{Du}{|Du|} D^2 u\right)\right).$$

上述の式において括弧の中身を $\Delta_p^N u$ とおき, Δ_p^N は normalized p-ラプラシアンと呼ばれ, tug-of-war game with noise [14] に現れる：

$$\Delta_p^N u := \Delta u + (p-2)\operatorname{tr}\left(\frac{Du}{|Du|} \otimes \frac{Du}{|Du|} D^2 u\right).$$

すると，$\Delta_p u = |Du|^{p-2}\Delta_p^N u$ と書ける．p-ラプラシアンを一般化するために，次の**非発散型**作用素を導入し，p-ラプラシアン型作用素と言う：

$$u \longmapsto |Du|^\theta \Delta_p^N u \quad (\theta > -1, 1 < p < \infty)$$

p-ラプラシアン型作用素は最初に Birindelli-Demengel [2] により導入された.

1.3 先行研究

１９８９年に，Caffarelli [8] は次の完全非線形一様楕円型方程式を研究し粘性解の内部 $C^{1,\sigma}$ 評価を証明した：

$$F(x, D^2 u) = f \qquad \text{in } B_1.$$

この評価は粘性解理論において非常に重要な結果である．２００４年に Birindelli-Demengel は p-ラプラシアン型作用素を導入し，特に特異の場合に注目し比較原理や Liouville 型の結果や第一固有関数の正則性などの結果を示した [2, 3, 4, 5, 6]．Birindelli-Demengel が研究した方程式の典型例としては

$$|Du|^\theta \mathcal{P}^-(D^2 u) = f \qquad \text{in } B_1 \quad (-1 < \theta < 0)$$

である．２０１３年に，Imbert-Silvestre [10] は**Improvement of Flatness**という方法を導入し次の退化楕円型方程式の粘性解の内部 $C^{1,\sigma}$ 評価を導いた：

$$|Du|^\theta F(D^2 u) = f \qquad \text{in } B_1 \quad (\theta > 0, F \text{ は一様楕円型}).$$

Improvement of Flatness に関しては，大まかに言えば目標関数とアフィン関数の差を評価することで $C^{1,\sigma}$ 正則性を導くという方法である．そして，２０１８年に Attouchi-Ruosteenoja [1] は Improvement of Flatness を用い p-ラプラシアン型方程式

$$-|Du|^\theta \Delta_p^N u = f \qquad \text{in } B_1 \quad (\theta > -1, 1 < p < \infty)$$

の粘性解の内部 $C^{1,\sigma}$ 評価を示した.

本研究も Improvement of Flatness を採用する．Improvement of Flatness の詳しい説明については第２節の「アイディア」を参照してほしい.

2　主定理

2.1　仮定

本研究では，次の３つの仮定とする．

仮定 A. θ_α, p_α $(\alpha \in \mathcal{A})$ を定数とする．

(A1) 全ての $\alpha \in \mathcal{A}$ に対し $p_\alpha > 1$ 且つ $p^* := \sup_{\alpha\in\mathcal{A}} p_\alpha < \infty$, $p_* := \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} p_\alpha > 1$;
(A2) 全ての $\alpha \in \mathcal{A}$ に対し $\theta_\alpha > 0$ 且つ $\theta^* := \sup_{\alpha\in\mathcal{A}} \theta_\alpha < \infty$;
(A3) 全ての $\alpha \in \mathcal{A}$ に対し $f_\alpha \in C(B_1) \cap L^\infty(B_1)$ 且つ $\sup_{\alpha\in\mathcal{A}} \|f_\alpha\|_{L^\infty(B_1)} < \infty$.

仮定 B. $\mu_* := 1 \wedge (p_* - 1), \mu^* := 1 \vee (p^* - 1)$ とおくと，次の**Cordes-Landis 型条件** ([15]) を満たすとする:

「ある十分小さな $\beta = \beta(n) > 0$ が存在し，$\mu^* \leq (1+\beta)\mu_*$ が成り立つ．」

仮定 C. $p_\alpha \geq 2$ $(\forall \alpha \in \mathcal{A})$ または $p_\alpha \in (1,2)$ $(\forall \alpha \in \mathcal{A})$ とする．

最も重要な仮定は B である．B を仮定している理由を説明しよう．１９８９年に，Caffarelli [8] は Harnack の不等式を示すことで次の Hölder 評価を証明した：

定理 2.1 ([8]). $f \in C(B_1) \cap L^\infty(B_1)$ とし，$u \in C(B_1)$ をそれぞれ

$$\mathcal{P}^-(D^2u) = |f| \quad \text{in } B_1, \quad \mathcal{P}^+(D^2u) = -|f| \quad \text{in } B_1$$

の粘性劣解と粘性優解とする．この時，ある定数 $C > 0$ と $\sigma \in (0,1)$ が存在し，内部評価

$$\|u\|_{C^{0,\sigma}(B_{1/2})} \leq C \left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^n(B_1)} \right)$$

が成り立つ．但し，C と σ は楕円定数 λ, Λ と次元 n のみ依存する．

しかし，定理 2.1 の u に対し粘性解でないと一般的には内部 $C^{1,\sigma}$ 正則性を持たない．正則性を上げるために，２０２４年に Lee-Yun [13] は Cordes-Landis 型条件を仮定し次の結果を示した：

定理 2.2 ([13]). $\sigma \in (0,1), f \in C(B_1) \cap L^\infty(B_1)$ とし，$u \in C(B_1)$ をそれぞれ

$$\mathcal{P}^-(D^2u) = |f| \quad \text{in } B_1, \quad \mathcal{P}^+(D^2u) = -|f| \quad \text{in } B_1$$

の粘性劣解と粘性優解とする．この時，ある十分小さな定数 $\beta = \beta(n,\sigma) > 0$ が存在し，

$$\Lambda \leq (1+\beta)\lambda$$

ならば，$u \in C^{1,\sigma}(B_{1/2})$ であり内部評価

$$\|u\|_{C^{1,\sigma}(B_{1/2})} \leq C \left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^\infty(B_1)} \right)$$

が成り立つ．但し，$C > 0$ は λ, σ, n のみ依存する．

Improvement of Flatness Lemmaという補題を示す際に定理 2.2 を利用するため，仮定 B が必要である（第 3 節を参照）.

2.2 主結果とアイディア

定理 2.3 (主結果)**.** 仮定 A,B,C とする．この時，定数 $C > 0$ と $\sigma \in (0,1)$ が存在し，(1.1) の任意の粘性解 $u \in C(B_1)$ は $C^{1,\sigma}(B_{1/2})$ であり，内部評価

$$[u]_{1+\sigma,B_{1/2}} \leq C\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \left(\sup_{\alpha\in\mathcal{A}}\|f_\alpha\|_{L^\infty(B_1)}\right)^{\frac{1}{\theta_*+1}}\right) \tag{2.1}$$

が成り立つ．ただし，$\theta_* := \inf_{\alpha\in\mathcal{A}}\theta_\alpha \geq 0$，$C$ と σ は $n, p^*, p_*, \theta_*, \theta^*$ のみ依存する.

Improvement of Flatness を紹介しよう．まず，Caffarelli の論法 [8] より，

$$\operatorname*{osc}_{x\in B_1} u \leq 1,\ \sup_{\alpha\in\mathcal{A}}\|f_\alpha\|_{L^\infty(B_1)} \leq \varepsilon_0 = \varepsilon_0(n,p^*) \tag{SR}$$

と仮定し議論を進めばよい．理由としては次の命題が成り立つことである：

命題 2.4. 主結果を証明するために,

$$\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq \frac{1}{2},\ \sup_{\alpha\in\mathcal{A}}\|f_\alpha\|_{L^\infty(B_1)} \leq \varepsilon_0 = \varepsilon_0(n,p^*)$$

の下で

$$[u]_{1+\sigma,B_{1/2}} \leq C$$

を示せばよい.

証明. 任意の $\tau > 0$ を取る．スケーリング変換

$$K := K_\tau := 2\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \left(\varepsilon_0^{-1}\sup_{\alpha\in\mathcal{A}}\|f_\alpha\|_{L^\infty(B_1)}\right)^{\frac{1}{\theta_*+1}} + \tau,\ v := \frac{u}{K},\ g_\alpha := \frac{f_\alpha}{K^{\theta_\alpha+1}}$$

を考え，最後に $\tau \longrightarrow 0$ とすればよい. □

次に，暫く (1.1) を忘れ次の摂動をした方程式に注目しその粘性解の同程度連続評価を示す：

$$\sup_{\alpha\in\mathcal{A}}\left\{-|Du|^{\theta_\alpha}\Delta^N_{p_\alpha}u - f_\alpha(x)\right\} = 0 \qquad \text{in } B_1, \tag{2.2}$$

$$\Delta^N_{p_\alpha;\xi}w := \operatorname{tr}\left[\left(I + (p_\alpha - 2)\frac{Dw+\xi}{|Dw+\xi|}\otimes\frac{Dw+\xi}{|Dw+\xi|}\right)D^2w\right].$$

ここで,$\xi \in \mathbb{R}^n$ は任意のベクトルである．最後に, (2.2) の粘性解に対し**Improvement of Flatness Lemma という補題（補題 3.4)**を示し，この補題と Iteration の手法を用い主結果を証明することができる．Improvement of Flatness Lemma に関しては，概略を述べると，評価したい関数と線形関数の差の振動をある小さな球上で評価するという補題である.

Improvement of Flatness という手法は次で与えられる同値な $C^{1,\sigma}$ セミノルムと Hölder 連続関数の特徴づけ（定理 2.6）に基づく（本研究ではこの同値なセミノルムを採用）：

定義 2.5 (同値な $C^{1,\sigma}$ セミノルム [12])**.**

$$[u]_{1+\sigma,B_r} := \sup_{\rho>0,x\in B_r} \rho^{-1-\sigma} \inf_{l\in\mathbb{P}_1} \|u-l\|_{L^\infty(B_\rho(x))}.$$

但し，$\sigma\in(0,1), r\in(0,1), \mathbb{P}_1 := \{l(y)=\langle s,y\rangle+t; s\in\mathbb{R}^n, t\in\mathbb{R}\}$ である．同値性の証明は [12] を参照してほしい．

定理 2.6 (Hölder 連続関数の特徴づけ [12])**.** ある $M>0$ と $\sigma\in(0,1)$ が存在し, 任意の $B_r(x)\subset B_1$ に対し次を満たす $\eta\in\mathbb{R}^n$ があれば，$u\in C^{1,\sigma}(B_1)$ である：

$$\operatorname*{osc}_{y\in B_r(x)} (u(y)-\langle\eta,y\rangle) \le Mr^{1+\sigma}.$$

注記 2.7. 平行移動することで，$\overline{B_1}$ はコンパクトなので内部 $C^{1,\sigma}$ を導くには，実際，原点における振動評価

$$\operatorname*{osc}_{y\in B_r} (u(y)-\langle\eta,y\rangle) \le Mr^{1+\sigma}$$

を示せば十分である．また，逆に $u\in C^{1,\sigma}(B_1)$ であれば上述の原点における振動評価が成り立つ．

定義 2.5 及び定理 2.6 があればこそ $C^{1,\sigma}$ 評価が自然に導かれる．

3 証明の概略

この節では同程度連続評価と Improvement of Flatness Lemma と主結果の証明の概略を述べよう．

3.1 同程度連続評価の証明の概略

同程度連続評価を示すには，仮定 B,C は不必要である．

定理 3.1 (同程度連続評価)**.** 仮定 A と (SR) とする．この時，任意の $r\in(0,1)$ に対し，ある定数 $C>0$ と $\gamma\in(0,1]$ が存在し任意の (2.2) の粘性解 $u\in C(B_1)$ に対し，内部評価

$$[u]_{0,\gamma,B_r} \le C$$

が成り立つ．但し，C と γ は u と ξ に依存しない．

$|\xi|$ が大きい場合は二重変数法（doubling argument） [11] を利用するが，小さい場合は Imbert が証明した Harnack の不等式 [9] を使う．

補題 3.2 ($|\xi|$ が大きい場合)**.** u に依存しない定数 $\nu_0>0$ が存在し，$|\xi|\ge\nu_0$ ならば，$\gamma=1$ 即ち内部 Lipschtiz 評価が成り立つ．

証明. $x_0\in B_{r/2}$ を取り固定する．二重変数法で次の上限を考え，十分大きな定数 $L_1, L_2>0$ が存在し上限の値が非正であることを示せばよい：

$$\sup_{x,y\in B_r} \left\{u(x)-u(y)-L_1\varphi(|x-y|)-L_2|x-x_0|^2-L_2|y-x_0|^2\right\},\ L_2 := \frac{16}{r^2}.$$

但し, 補助関数 φ の定義は [10] を参照してほしい．背理法で非正であることを示す．$(\overline{x}, \overline{y}) \in B_r \times B_r$ を上限を取る内点とする．Ishii の補題 [7] と粘性劣解・優解の定義より，任意の $\delta > 0$ に対し，ある $\alpha_\delta \in \mathcal{A}$ が存在し，

$$-\operatorname{tr}(A^x X - A^y Y) \leq 2\varepsilon_0 + \delta$$

が成り立つ．但し，

$$A^x := I + (p_{\alpha_\delta} - 2)\frac{\eta^x}{|\eta^x|} \otimes \frac{\eta^x}{|\eta^x|},\ A^y := I + (p_{\alpha_\delta} - 2)\frac{\eta^y}{|\eta^y|} \otimes \frac{\eta^y}{|\eta^y|},$$

$$\eta^x := L_1\varphi'(|\overline{x} - \overline{y}|)\frac{\overline{x} - \overline{y}}{|\overline{x} - \overline{y}|} + 2L_2(\overline{x} - x_0) + \xi,\ \eta^y := L_1\varphi'(|\overline{x} - \overline{y}|)\frac{\overline{x} - \overline{y}}{|\overline{x} - \overline{y}|} - 2L_2(\overline{y} - x_0) + \xi$$

であり，$X = X(\rho), Y = Y(\rho), 0 < \rho \ll 1$ は Ishii の補題に由来する．Ishii の補題 [7] により得られる行列不等式を利用し $\|Y\|$ と $X - Y$ の固有値を評価することができ，評価式を用いると，次の不等式が導かれる：

$$C_1\mu_* L_1 - \frac{C_2}{\rho} - 2(2L_2 + \rho)C_3 \leq 2\varepsilon_0 + \delta \longrightarrow 2\varepsilon_0\ (\delta \longrightarrow 0).$$

但し，$C_1, C_2, C_3 > 0$ は p_*, p^*, n のみ依存する定数である．故に，$\rho := L_1^{-1/2}$ とおき，$L_1 \longrightarrow \infty$ とすれば矛盾. □

補題 3.3 ($|\xi|$ が小さい場合)**.** $|\xi| \leq \nu_0$ ならば，$\gamma \in (0, 1)$ 即ち内部 Hölder 評価が成り立つ.

証明. Imbert が導入した条件 [9] を確認し Harnack の不等式 [9] を使えばよい. □

3.2 Improvement of Flatness Lemma の証明の概略

補題 3.4 (Improvement of Flatness Lemma)**.** 仮定 A,B,C と (SR) とする．ある $\rho \in (0, 1)$ が存在し，任意の $\xi \in \mathbb{R}^n$ と (2.2) の粘性解 $u \in C(B_1)$ に対し，次を満たす $\eta \in \mathbb{R}^n$ がある：

$$\operatorname*{osc}_{x \in B_\rho} (u(x) - \langle \eta, x \rangle) \leq \frac{1}{2}\rho.$$

証明. 定理 3.1 より，Ascoli-Arzelà の定理と背理法を利用すると，次を満たす列 ξ_m, f_m, u_m と関数 $\tilde{u} \in C(B_1)$ が取れる：

$$f_m \longrightarrow 0,\ \xi_m \longrightarrow 0,\ u_m \longrightarrow \tilde{u}\ (\text{局所一様}),\ \operatorname*{osc}_{x \in B_\rho} (\tilde{u}(x) - \langle \eta, x \rangle) \geq \frac{1}{2}\rho.$$

ここで，ξ_m が有界でない場合は Caffarelli の結果 [8] より簡単なので有界の場合を考える．また，簡単のため収束先を 0 とする．$m \longrightarrow \infty$ とすると，$\tilde{u}$ の満たす極限方程式

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \left\{-|D\tilde{u}|^{\theta_\alpha} \Delta^N_{p_\alpha} \tilde{u}\right\} = 0 \qquad \text{in } B_1$$

が得られる．実際，$\tilde{u}$ が次の方程式の粘性解となることを示すことができる：

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \left\{-\Delta^N_{p_\alpha} \tilde{u}\right\} = 0 \qquad \text{in } B_1. \tag{3.1}$$

$\lambda = \mu_*, \Lambda = \mu^*$ の Pucci 作用素を考え (3.1) に定理 2.2 を適用すると，ある $\sigma_0 \in (0, 1)$ が存在し $\tilde{u} \in C^{1,\sigma_0}(B_{1/2})$ が示される．故に，定理 2.6 と注記 2.7 より ρ を十分小さく取ると矛盾. □

3.3 主結果の証明の概略

補題 3.4 を利用し Iteration の手法で主結果を示す.

命題 3.5 (Iteration)**.** 仮定 A,B,C と (SR) とする．ある $\rho \in (0,1), \sigma \in (0,1)$ が存在し，任意の (1.1) の粘性解 $u \in C(B_1)$ と各 $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し，次を満たす $\eta_k \in \mathbb{R}^n$ が存在する：

$$\operatorname*{osc}_{x \in B_{\rho^k}} (u(x) - \langle \eta_k, x \rangle) \leq \rho^{k(1+\sigma)}.$$

証明. 数学的帰納法で示す．次の u のスケーリング変換 u_k を考え，u_k に対し補題 3.4 を適用すればよい：

$$u_k(x) := \rho^{-k(1+\sigma)} \left[u\left(\rho^k x\right) - \left\langle \eta_k, \rho^k x \right\rangle \right].$$

実際，u_k が次の方程式の粘性解となることが示せる：

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \left\{ -|Du_k + \rho^{-k\sigma}\eta_k|^{\theta_\alpha} \Delta^N_{p_\alpha; \rho^{-k\sigma}\eta_k} u_k - g_{\alpha,k}(x) \right\} = 0 \qquad \text{in } B_1,$$

$$g_{\alpha,k}(x) := \rho^{k(1-\sigma(1+\theta_\alpha))} f_\alpha\left(\rho^k x\right).$$

また，

$$\sigma \leq \min\left\{ \frac{1}{1+\theta^*}, -\log_\rho 2 \right\},\ \eta_{k+1} := \eta_k + \rho^{k\sigma}\xi_k$$

とすると，補題 3.4 より帰納法のための不等式が導かれる．但し，$\xi_k \in \mathbb{R}^n$ は u_k に対応する補題 3.4 に由来するベクトルである. □

主結果の証明. $r \in (0,1)$ を固定する．命題 3.5 の ρ を用い $\rho^{k+1} \leq r \leq \rho^k$ となる $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ を取り定理 2.6 を利用すればよい. □

参考文献

[1] A. Attouchi, E. Ruosteenoja, Remarks on regularity for p-Laplacian type equations in non-divergence form, J. Differential Equations 265 (2018) 1922-1961.

[2] I. Birindelli, F. Demengel, Comparison principle and Liouville type results for singular fully nonlinear operators, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. 13 (2004) 261-287.

[3] I. Birindelli, F. Demengel, Eigenvalue, maximum principle and regularity for fully non linear homogeneous operators, Commun. Pure Appl. Anal. 6 (2007) 335–366.

[4] I. Birindelli, F. Demengel, Eigenvalue and Dirichlet problem for fully-nonlinear operators in non-smooth domains, J. Math. Anal. Appl. 352 (2) (2009) 822–835.

[5] I. Birindelli, F. Demengel, Regularity and uniqueness of the first eigenfunction for singular fully nonlinear operators, J. Differential Equations 249 (5) (2010) 1089–1110.

[6] I. Birindelli, F. Demengel, Regularity for radial solutions of degenerate fully nonlinear equations, Nonlinear Anal.: Theory, Methods Appl. 75 (17) (2012) 6237–6249.

[7] G. Barles, C. Imbert, Second-order elliptic integro-differential equations: Viscosity solutions' theory revisited, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 25 (2008) 567-585.

[8] L. A. Caffarelli, Interior a priori estimates for solutions of fully nonlinear equations, Ann. Math. 130 (1989) 189-213.

[9] C. Imbert, Alexandroff-Bakelman-Pucci estimate and Harnack inequality for degenerate/singular fully non-linear elliptic equations, J. Differential Equations 250 (3) (2011) 1553-1574.

[10] C. Imbert, L. Silvestre, $C^{1,\alpha}$ regularity of solutions of some degenerate fully non-linear elliptic equations, Adv. Math. 233 (2013) 196-206.

[11] H. Ishii, P. -L. Lions, Viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations, J. Differential Equations 83 (1) (1990) 26-78.

[12] N. V. Krylov, Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Hölder Spaces, Graduate Studies in Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[13] S. Lee, H. Yun, $C^{1,\alpha}$-regularity for functions in solution classes and its application to parabolic normalized p-Laplace equations, J. Differential Equations 378 (2024) 539-558.

[14] Y. Peres, S. Sheffield, Tug-of-war with noise: a game-theoretic view of the p-Laplacian, Duke Math. J. 145 (2008) 91-120.

[15] G. Tralli, A certain critical density property for invariant Harnack inequalities in H-type groups, J. Differential Equations, 256 (2014) 461-474.